第29卷 第10期 西 安 交 通 大 学 学 报 Vol. 29 №10
1995年10月 JOURNAL OF XI' AN JIAOTONG UNIVERSITY Oct. 1995

(18) 114－117，126

非 Hausdorff 线性拓扑空间的拓扑结构

陈 勇
(理学院)

O177.3

摘 要

A 通过引入丛集、带集、带空间等概念，证明了任何非 Hausdorff 线性拓扑空间都是带空间，其拓扑结构由零点集的闭包$\overline{\{\theta\}}$(子空间)决定，是具有固定形式的. 随后作为特例，讨论了有限维非 Hausdorff 空间，给出了更强的结果.

关键词：带集 带空间 非 Hausdorff 线性拓扑空间
中国图书资料分类法分类号：O177.3

非豪斯道夫空间

1 丛集、带集与带空间

设 X 为线性空间，P 为 X 的一个线性子空间，把线性流形 $x+P$ 记为 $S_P(x)$，称为过 x 的以 P 为底的线性流形.

首先利用线性流形在线性空间中引入丛集、丛体的概念.

定义1 设 X 为线性空间，$P\subset X$ 为其非零线性子空间，如果 $A\subset X$ 满足$\forall\ a\in A, S_P(a)\subset A$，则称 A 是(以 P 为底的)丛集. 称全体以 P 为底的丛集为一丛体，记为 $\mathscr{A}_P^{(X)}$，或简记为 $\mathscr{A}_P$.

丛集有如下一个等价说法.

定理1 设 X 为线性空间，则 $A\subset X$ 是一丛集的充要条件是 A 是一族以某非零子空间为底的线性流形之并.

证明 设 $A\in\mathscr{A}_P$，则$\forall\ x\in A, S_P(x)\subset A$，因而 A 可表为一族以 P 为底的线性流形之并

$$A=\bigcup_{x\in A}S_P(x) \tag{1}$$

反之，如

$$A=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}S_P(y_\alpha) \tag{2}$$

这里 $S_P(y_\alpha)$均为以 P 为底的线性流形，Γ 是指标集，于是$\forall\ x\in A$，$\exists\ \alpha_1\in\Gamma$，$x\in S_P(y_{\alpha_1})$，据线性流形性质，$x\in y_{\alpha_1}+P$，故 $x-y_{\alpha_1}\in P$，那么$\forall\ t\in P$，$t+y_{\alpha_1}=[t+(y_{\alpha_1}-x)]+x\in P+x$，即 $S_P(y_{\alpha_1})\subset x+P$；另一方面，$\forall\ t+x\in x+P$，$t+x=[t+(x-y_{\alpha_1}]+y_{\alpha_1}\in P+y_{\alpha_1}=S_P(y_{\alpha_1})$，即 $x+P\subset S_P(y_{\alpha_1})$. 故

收到日期：1993-11-27. 陈 勇：男，1979年10月生，应数21班学生.

$$S_P(y_{a_1}) = P + x = S_P(x) \tag{3}$$

由 $S_P(y_{a_1})\subset A$ 知 $S_P(x)\subset A$，故 $A\in\mathscr{A}_P$. 证毕.

丛集还有如下一个重要性质，就是余不变性.

定理2 设 $A\in\mathscr{A}_P$，则 $A^c\in\mathscr{A}_P$.

证明 设 $A\in\mathscr{A}_P$，则$\forall\ x\in A^c$，且必 $S_P(x)\subset A^c$，否则有一 $y\in S_P(x)$，且 $y\in A$，因 $A\in\mathscr{A}_P$，故 $S_P(y)\subset A$，又由线性流形性质易见 $S_P(x)=S_P(y)\subset A$，则 $x\in A$，矛盾.

故必 $S_P(x)\subset A^c$，此表明 $A^c\in\mathscr{A}_P$. 证毕.

带集是一种特殊的丛集.

定义2 设 X 为线性空间，P 为 X 的(非零)子空间，$\theta\neq x_0\in X$，对正数 δ，X 的子集 $Z=\bigcup\limits_{|\lambda|<\delta}S_P(\lambda x_0)$(其中 $\lambda\in K$，K 是 X 的定义数域)是含 θ 的丛集，称它为沿方向 x_0以 P 为底的 δ-零点带，记作 $Z_{P,x_0,\delta}$，称 δ 为带径. δ-零点带 $Z_{P,x_0,\delta}$平移 x 后便称为过 x 的沿方向 x_0以 P 为底的 δ-带. 又设 $D\subset\dot{X}=X\backslash\{\theta\}$，满足 D 中任两个不同的元线性无关，且$\forall\ x\in X$，$\exists\ \lambda_x\in K$，使对某一 $x_a\in D$，$x=\lambda_x x_a$，则 $Z=\bigcup\limits_{x_a\in D}Z_{P,x_a,\delta_{x_a}}$(其中 δ_x 为相应带径)称为以 P 为底的零点带，记作 Z_P，D 称为它的环绕集. 零点带 Z_P 平移 x 后就称为(过 x 的)以 P 为底的带，记作 $Z_P(x)$.

由定义易见以 P 为底之零点带是吸收集. 事实上$\forall\ x\in X$，因有 x_a 与 λ_x 满足 $x=\lambda_x x_a$. 再设 δ_a 为 Z_{P,x_a,δ_a}之带径，并取 $\delta=\dfrac{\delta_a}{|\lambda_x|+1}$

则当 $|\lambda|<\delta$ 时 $\lambda x=\lambda\lambda_x x_a$，而 $|\lambda\lambda_x|\leqslant\dfrac{\delta_a}{|\lambda_a|+1}|\lambda_x|<\delta_a$，由定义 $\lambda x=\lambda\lambda_x x_a\in Z=\bigcup\limits_{x_0\in D}Z_{P,x_0,\delta x_0}$.

下文中当不特别指明时，沿方向 x_0的带的记号中带径常省去.

定义3 设 X 是线性空间. $B\subset X$，$\theta\neq x_0\in X$，如$\forall\ b\in B$，存在过 b 沿方向 x_0以 P 为底的带 $Z_{P,x_0}+b\overset{\text{记为}}{=}Z_{P,x_0}(b)\subset B$，则称 B 为沿方向 x_0以 P 为底的带集；如$\forall\ b\in B$，有过 b 的带 $Z_P(b)\subset B$，则称 B 为以 P 为底的带集，简称带集.

本文用 $\mathscr{Z}_{P,x_0}$表示沿方向 x_0以 P 为底的带集全体，$\mathscr{Z}_P$ 则为以 P 为底的带集全体.

值得注意的是，带集与沿某方向的带集是不同的，但它们有如下紧密的联系.

定理3 设 X 为线性空间，其子集 B 为带集的充要条件是 B 是沿任意方向的带集.(以上均指以某 P 为底).

证明 (1)必要性. 设 B 为带集，$\forall$ 方向 $x_0\in X$、$\forall\ b\in B$、由带集定义，$\exists\ Z_P(b)=b+\bigcup\limits_{x_a\in D_b}Z_{P,x_a,\delta_x}\subset B$，因$\exists\ x_{a_0}\in D_b$ 与数 λ_{x_0}，使 $x_0=\lambda_{x_0}x_{a_0}$；取 $\delta=\dfrac{\delta_{a_0}}{1+|\lambda_{x_0}|}$，则易知 $Z_{P,x_0,\delta}\subset Z_{P,x_{a_0}}\subset Z_P$.

故有 $Z_{P,x_0}(b)=Z_{P,x_0,\delta}+b\subset Z_P+b=Z_P(b)\subset B$，即 $B\in\mathscr{Z}_{P,x_0}$.

(2)充分性. 采用构造商集法. 在 $\mathring{X}$定义 $x\sim y$，当且仅当 x 与 y 线性相关，这是一个等价关系. 在商集 $\dot{X}/\sim$中，从每一等价类取定 $x_a\in(\widetilde{x_a})$，所有取出的 x_a 组成的集记为 D，$\forall\ b\in B$，$\forall\ x_a\in D$，由 $B\in\mathscr{Z}_{P,x_a}$知应有 $Z_{P,x_a}+b\subset B$. 取 $Z=\bigcup\limits_{x_a\in D}Z_{P,x_a}$，由等价类性质易得 D 合于环绕集条件，于是 Z 是零点带. 从而 $Z+b=\bigcup\limits_{x_a\in D}Z_{P,x_a}+b=\bigcup\limits_{x_a\in D}(Z_{P,x_a}+b)\subset B$. $Z_P(b)=Z+b$ 即为过 b 含

于 B 之带，故 $B\in\mathscr{Z}$.

与丛集似，带集也可表为一族同底带集之并，沿某方向的带集也是一族同底同方向带的并（事实上不难看出一族同底同方向带之并也是沿该方向带集）.

定义4 设 X 为线性拓扑空间，如 X 的任一非空开集均为以某非零线性子空间 P（与不同开集无关）作底的带集，则称 X 是（以 P 为底的）带空间.

下节将证明，所有非 T_2 线性拓扑空间都是带空间.

2 非 Hausdorff 线性拓扑空间的拓扑结构

众所周知，非 T_2 线性拓扑空间是存在的，那么这种空间究竟有怎样的结构呢?这是本文要解决的中心问题.下面叙述并证明本文的主要定理，回答了这个问题.

定理4 设 X 是非 Hausdorff 线性拓扑空间，则 X 必为以 $\overline{\{\theta\}}$ 为底的带空间.

证明 证明分两步：

(i) X 中任一非空开集均为丛集.

事实上，$\forall\ G\in\mathscr{T}$，则 $F=G^c$ 为闭集.不妨设 $G\subsetneqq X$ 即 $F\neq\Phi$，因 X 非 T_2，故 X 亦非 T_1[1]，所以 $\overline{\{\theta\}}\neq\{\theta\}$，因此 $\overline{\{\theta\}}=P$ 是一非零子空间[2].从而 $\forall\ x\in F$，$\overline{\{x\}}\subset\overline{F}=F$，即 $S_P(x)=x+P=x+\overline{\{\theta\}}=\overline{\{x\}}\subset F$，可见 $F\in\mathscr{A}_P$，由定理2，$G\in\mathscr{A}_P$.

(ii) 任一非空开集均为以 P 作底的带集.

设 $G\in\mathscr{T}$，则 $\forall\ x\in G$，$G_x=G-x$ 是 θ 的吸收邻域，故对 $\forall\ x_0\neq\theta$ 且 $x_0\in X$，有 $\delta_{x_0}>0$，当 $|\lambda|<\delta_{x_0}$ 时 $\lambda x_0\in G_x$. 因 $G_x\in\mathscr{A}_P$，故

$$
\begin{aligned}
& S_P(\lambda x_0)\subset G_x \\
& Z_{P,x_0,\delta x_0}=\bigcup_{|\lambda|<\delta_{x_0}} S_P(\lambda x_0)\subset G_x \qquad (4)\\
& Z_{P,x_0,\delta x_0}(x)\subset G
\end{aligned}
$$

这说明 G 是沿任何方向的带集，因此由定理3就有 $G\in\mathscr{Z}_P$.

综合(i)、(ii)知 X 是带空间，底为 $P=\overline{\{\theta\}}$. 证毕.

另外如 X 是以某非零线性子空间 P 为底的带空间，则 X 显然是非 T_2 的，故此定理表明非 Hausdorff 线性拓扑空间是有固定、简单的结构的，该拓扑结构由 $\overline{\{\theta\}}$ 决定.从几何直观上看，这相当于 X 中任一非空开集都是由一族"与 P 平行的线性流形"组成的带拼成的.

3 有限维非 Hausdorff 线性拓扑空间的拓扑结构

为方便起见，本节考虑实的有限维非 T_2 线性拓扑空间，复空间的情形类似.

定义5 设 $X=\mathrm{Span}\{e_1,\cdots,e_n\}$ 为 R 上 n 维线性空间，这里 $e_1,\cdots,e_n$ 为 X 的基；$P=\mathrm{Span}\{e_1,\cdots,e_m\}$ $(0<m\leqslant n)$ 是一非零子空间；T 为 $X\to R^n$ 的坐标映象，则称

$$C_{P,\delta}=\bigcup\ \{S_P(x)\,|\,\alpha_i=0,i=1,2,\cdots,m,\text{且}\ \|T(x)\|_{R^n}<\delta\} \qquad (5)$$

（这里 $\delta>0$，而 α_i 是 x 的第 i 个坐标.）为以 P 作轴的 δ-零点柱，δ 称为柱半径. $C_{P,\delta}$ 平移 x 后即称为过 x 的以 P 作轴的柱，记为 $C_{P,\delta}(x)$. 所谓的子集 A 为以 P 作轴的柱集是指 $\forall\ x\in A$，存在 $\delta_x>0$，使 $C_{P,\delta_x}(x)\subset A$.

显然，零点柱是一个零点带，而柱集也是一个带集. A 是以 P 为轴的柱集，相当于 A 为一族以 P 作轴的柱之并.

定义6 若 n 维(实)线性拓扑空间 X 的每一非空开集均为以 P 作轴之柱集，则称 X 是以 P 为轴的柱空间.

定理5 n 维非 Hausdorff 实线性拓扑空间是以 $\overline{\{\theta\}}$ 为轴的柱空间.

证明 在 $\overline{\{\theta\}}$ 中取一组基 $e_1,\cdots,e_m(m>0)$. 不妨设 $m<n$，(不然 $\overline{\{\theta\}}=X$，即可见 X 是平凡空间，所证结论已成立). 于是可将 $\{e_1,\cdots,e_m\}$ 扩充为 X 的一组基 $\{e_1,\cdots,e_m,\cdots,e_n\}$.

$\forall\ G\in\mathscr{T}, G\neq\Phi$. 任取 $x_0\in G$，考虑 θ 的开邻域 $G_{x_0}=G-x_0$，取 X/P 为关于子空间 $P=\overline{\{\theta\}}$ 之商空间，Q 是 $X\to X/P$ 的商映象，显然 X/P 是以 $\widetilde{(e_{m+1})},\cdots,\widetilde{(e_n)}$ 为基的 $n\text{-}m$ 维空间. 另外易验证 $\forall\ x\in X$，等价类 $\widetilde{(x)}=S_P(x)$.

因商拓扑 $\mathscr{T}_Q$ 下的商映象为连续开映象为连续开映象[1]. 故 $Q(G_{x_0})$ 为 X/P 中 $(\widetilde{\{\theta\}})$ 的开邻域，又 $P=\overline{\{\theta\}}$ 是闭子空间，故 X/P 成为 Hausdorff 的线性拓扑空间[1]，而它又由坐标映象拓扑同构于 R^{n-m}[3]，设 $X/P\to R^{n-m}$ 的坐标映象(也是拓扑同构映象)为 $\overline{T}$，则有 $\overline{T}(Q(G_{x_0}))$ 是 R^{n-m} 中含0之开集，必有一0点 $n-m$ 维开球 $B(0,\delta)$，使 $B(0,\delta)\subset\overline{T}(Q(G_{x_0}))$. 下面证明

$$\bigcup\ \{S_P(x)\,|\,\overline{T}(\widetilde{(x)})\in B(0,\delta), x\in \mathrm{Span}\{e_{m+1},\cdots,e_n\}\}\subset G_{x_0} \tag{6}$$

事实上，对 $x\in\mathrm{Span}\{e_{m+1},\cdots,e_n\}$，可设 $x=\sum\limits_{i=m+1}^{n}\alpha_i\cdot e_i$，故

$$\widetilde{(x)}=\sum_{i=m+1}^{n}\alpha_i\widetilde{(e_i)} \tag{7}$$

当 $T(\widetilde{(x)})=(\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n)^T\in B(0,\delta)\subset\overline{T}(Q(G_{x_0}))$ 时，可见 $\widetilde{(x)}\in Q(G_{x_0})$. 因此有 $x'\in G_{x_0}$，$Q(x')=\widetilde{(x)}$，即 $x'\in\widetilde{(x)}=S_P(x)$，于是 $S_P(x')=S_P(x)$. 又 $G_{x_0}\in\mathscr{A}_P$，故 $S_P(x)=S_P(x')\subset G_{x_0}$. 因此(7)式成立.

但(7)式中 $x\in\mathrm{Span}\{e_{m+1},\cdots,e_n\}$，且 $\overline{T}(\widetilde{x})\in B(0,\delta)$

$$\begin{aligned}&\Longleftrightarrow\alpha_i=0(i=1,\cdots,m)\ 且\ \|T(x)\|_{R^n}\\&=\|(0,\cdots,0,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n)^T\|_{R^n}\\&=\|(\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n)^T\|_{R^{n-m}}<\delta\end{aligned}$$

这里 α_i 为 $T(x)$ 的第 i 个坐标.

可见
$$\begin{aligned}C_{P,\delta}&=\bigcup\ \{S_P(x)\,|\,\alpha_i=0, i=1,\cdots,m;且\ \|T(x)\|_{R^n}<\delta\}\\&=\bigcup\ \{S_P(x)\,|\,\overline{T}(\widetilde{(x)})\in B(0,\delta), x\in\mathrm{Span}\{e_{m+1},\cdots,e_n\}\}\subset G_{x_0}\end{aligned}$$

故
$$C_{P,\delta}(x_0)=C_{P,\delta}+x_0\subset x_0+G_{x_0}=G$$

由 x_0 在 G 中的任取性使得 G 是柱集. 故 X 为以 P 作轴的柱空间. 证毕.

这样，非 T_2 的 n 维线性拓扑空间的拓扑结构便可由比带集更强的柱集来刻画.

(下转第126页)

A POLYNOMIAL TIME ALGORITHM IN GEOMETRIC PROGRAMMING

Zhang Kecun Xiao Wenming
(School of Sciences)

Abstract

The original and dual road trace interior point algorithm is generalized and applied to positive definite geometric programming, which makes use of the characteristics of geometric programming and duality principle. It is proved that this algorithm is a polynomial time algorithm for unconstrained positive definite geometric programming. It is expected that this algorithm can be generalized and applied to constrained geometric programming problems.

Keywords: *geometric programming polynomial time algorithm duality principle*

(上接第117页)

参 考 文 献

1 寿纪麟,王绵森. 分析拓扑引论. 西安:西安交通大学出版社,1988
2 夏道行,杨亚立. 线性拓扑空间引论. 上海:上海科技出版社,1986
3 Schaefer H H. Topological vector spaces. New York: Springer-Verlag, 1971

(编辑 朱元昌)

THE TOPOLOGICAL STRUCTURE OF NON-HAUSDORFF LINEAR TOPOLOGICAL SPACE

Chen Yong
(School of Sciences)

Abstract

By introducing the definition of bundle-set, strip-set and strip-space, this paper proves that every non-Hausdorff linear topological space is a strip-space. Moreover, its structure of topology can be determined by the closure of subspace $\{\theta\}$, namely, $\{\bar{\theta}\}$. Then the finite-dimentional non-Hausdorff space is dealt with as a special example and further results are attained.

Keywords: *strip-set strip-space non-Hausdorff linear topological space*